

Задача Д2

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3, блока 4 (масса равномерно распределена по ободу) и катка или подвижного блока 5 (сплошной однородный цилиндр). Тела системы соединены друг с другом нитями, участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c .

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, механическая система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления. Все катки и подвижные блоки катятся по плоскостям без скольжения.

Требуется определить значение искомой величины в момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 .

Схемы систем приведены в Таблице 1.

Данные общие для всех вариантов:

радиусы шкива 3 $R_3=0,3$ м; $r_3=0,1$ м; радиус инерции шкива $\rho_3=0,2$ м;

радиус блока 4 $R_4=0,2$ м;

коэффициент трения грузов о плоскость $f=0,1$;

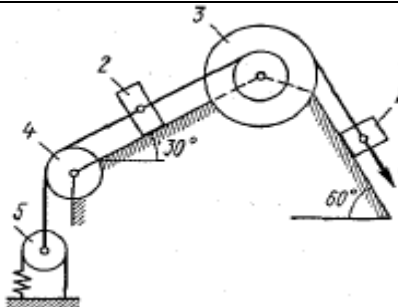
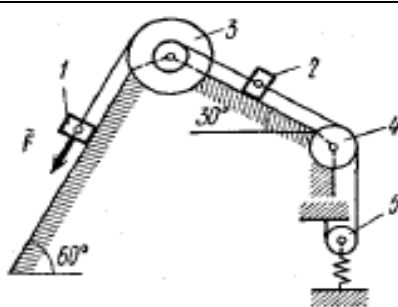
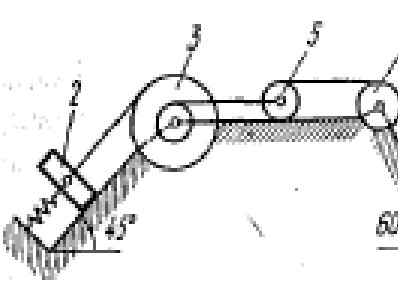
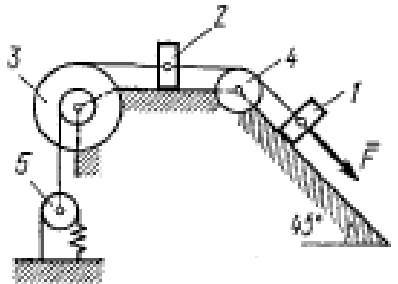
путь, пройденный грузом 1, $s_1=0,2$ м.

Численные значения других заданных величин приведены в Таблице 2.

На всех рисунках не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Вариант задания выбирается по последним двум цифрам зачетки: предпоследняя цифра – номер схемы (Таблица 1), последняя цифра – номер условия (Таблица 2). Например: №091365, механизм – 6, условие – 5.

Таблица 1. Схемы механических систем

 <p>Схема 0</p>	 <p>Схема 1</p>
 <p>Схема 2</p>	 <p>Схема 3</p>

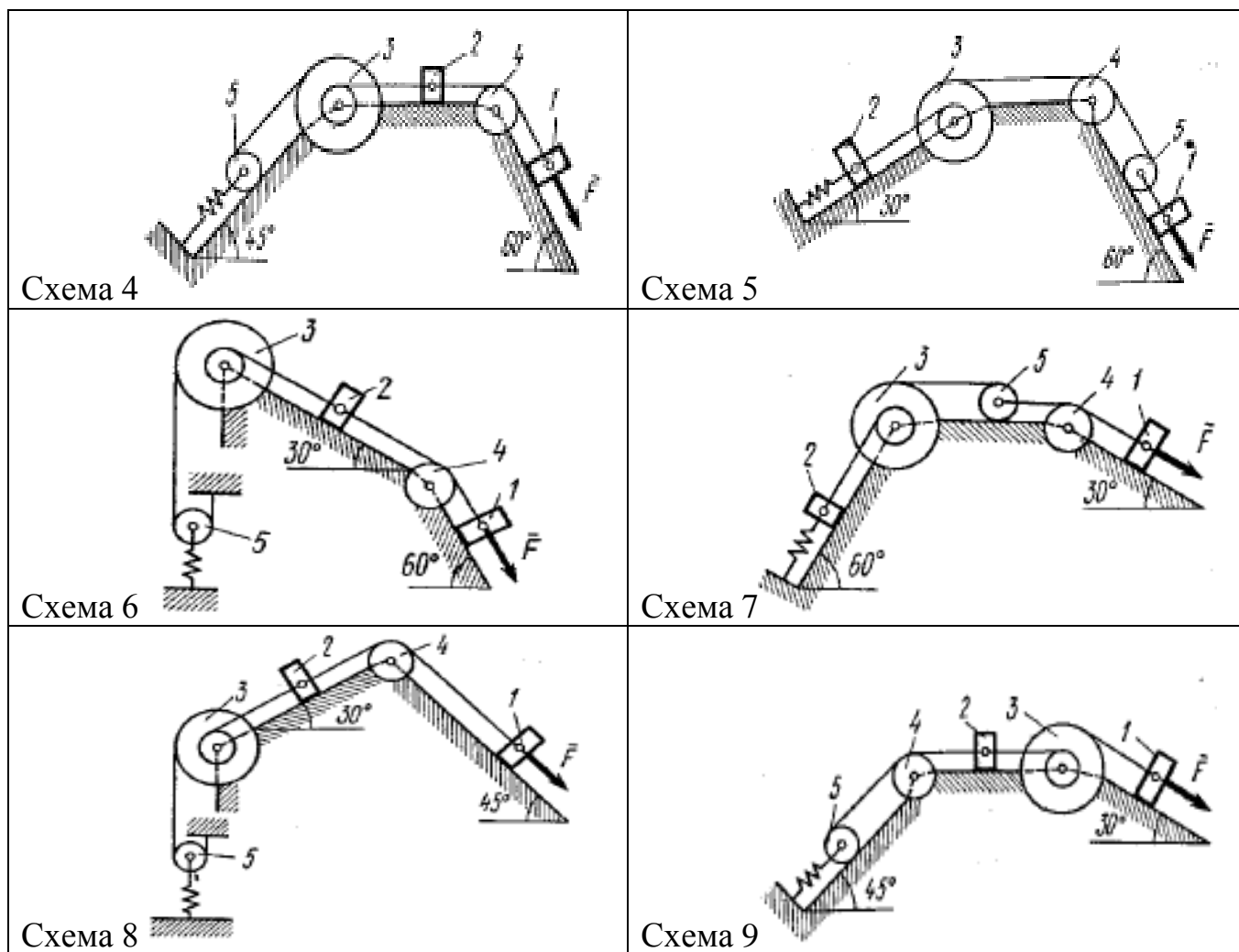


Таблица 2. Исходные данные

Номер условия	$m_1, \text{кг}$	$m_2, \text{кг}$	$m_3, \text{кг}$	$m_4, \text{кг}$	$m_5, \text{кг}$	$c, \text{Н/м}$	$M, \text{Н} \cdot \text{м}$	$F = f(s), \text{Н}$	найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	V_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	V_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	5	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	V_1
5	0	5	4	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	V_{C5}
6	8	0	0	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	V_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	V_{C5}

Указания к решению задачи Д2

Это задача на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи следует учесть, что кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел. Эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую требуется определить в задаче. При вычислении работы, надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1 , учтя, что зависимость между перемещениями будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Кинетическая энергия твердого тела

1. Поступательное движение твердого тела:

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m v_C^2,$$

кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

2. Вращательное движение твердого тела:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

3. Плоскопараллельное движение твердого тела:

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{z_C} \omega^2,$$

при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Моменты инерции однородных тел

1. Однородный круглый цилиндр (каток):

$$J_{z_c} = \frac{mR^2}{2},$$

R – радиус катка.

2. Однородное кольцо или цилиндрическая оболочка, масса которой распределена по ободу (блок):

$$J_{z_c} = mR^2,$$

R – радиус блока.

3. Тело сложной конфигурации (ступенчатый шкив):

$$J_z = m\rho_z^2.$$

ρ_z – радиус инерции шкива.

Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями

Разделим все действующие на систему внешние и внутренние силы на *активные и реакции связей*.

Тогда теорема об изменении кинетической энергии системы может быть представлена в виде:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^a + \sum A_k^r$$

Идеальные связи – это связи, реакции которых не совершают работу на элементарном перемещении системы:

$$\sum dA_k^r = 0$$

т.е. сумма элементарных работ реакций идеальных связей равна нулю.

Для системы с идеальными связями теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^a$$

изменение кинетической энергии системы с идеальными связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних *активных* сил.

Это позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей.

Примеры идеальных связей: идеально-гладкая поверхность, шарнир без трения, нерастяжимая нить, шероховатая поверхность при качении колеса без проскальзывания.

Примеры неидеальных связей: шероховатая поверхность при скольжении по ней тела (работу совершает сила трения), пружина (работу совершает сила упругости), шарнир или подшипник с трением (работу совершает момент трения).

Примечание: В случае неидеальной связи ее реакцию будем рассматривать как активную силу:

1. шероховатая поверхность, при скольжении тела по которой работу совершает сила трения - будем рассматривать силу трения, как активную силу;
2. Пружина, при деформации которой сила упругости совершает работу - будем рассматривать силу упругости как активную силу.

Пример решения задачи

Исходные данные:

Схема 0;

$m_1=9$ кг; $m_2=0$ кг; $m_3=0$ кг; $m_4=7$ кг; $m_5=15$ кг;

$c=300$ Н/м; $M=0,9$ Н м; $F(s)=60(5+4s)$ Н;

$R_3=0,6$ м; $r_3=0,3$ м; радиус инерции $\rho_3=0,3$ м; $R_4=0,4$ м; коэффициент трения грузов о плоскость $f=0,05$; $s_1=0,2$ м.

Найти: V_1

Решение

Изобразим активные силы:

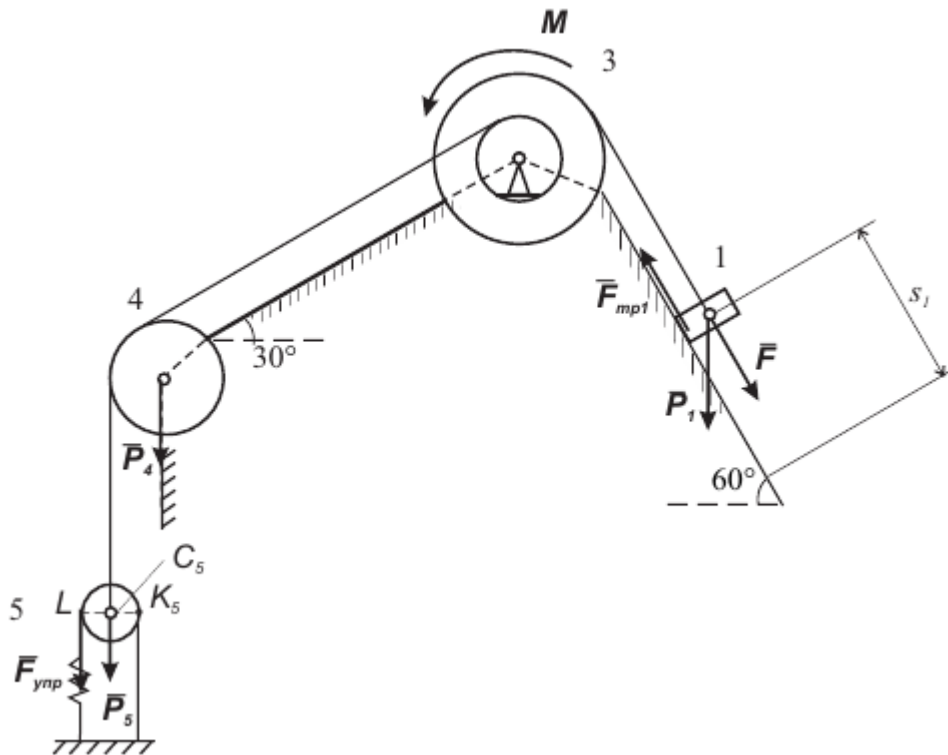


Рисунок 1. Система под действием активных сил

Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями:

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

Так как в начальный момент система находилась в покое $T_0 = 0$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_4 + T_5$$

Груз 1 совершает поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

Блок 4 совершает вращательное движение

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2$$

Момент инерции блока

$$J_4 = m_4 R_4^2$$

Блок 5 совершает плоскопараллельное движение (C_5 – центр масс, K_5 – мгновенный центр скоростей)

$$T_5 = \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2 + \frac{1}{2} m_5 V_{C5}^2$$

Момент инерции блока

$$J_5 = \frac{1}{2} m_5 r_5^2$$

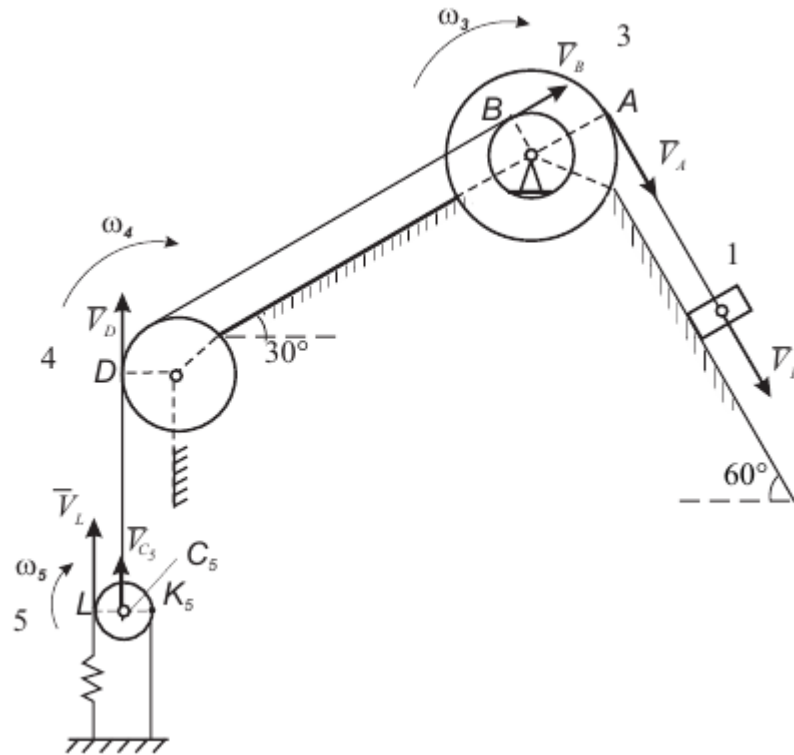


Рисунок 2. Взаимосвязь между скоростями частей системы

Определим соотношения между скоростями:

$$V_A = V_1$$

$$\omega_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{V_1}{R_3}$$

$$V_B = \omega_3 r_3 = V_1 \frac{r_3}{R_3}$$

$$V_D = V_B = V_1 \frac{r_3}{R_3}$$

$$\omega_4 = \frac{V_D}{R_4} = V_1 \frac{r_3}{R_4 R_3}$$

$$V_{C_5} = V_D = V_1 \frac{r_3}{R_3}$$

$$\omega_5 = \frac{V_{C_5}}{C_5 K_5} = \frac{V_{C_5}}{r_5} = V_1 \frac{r_3}{r_5 R_3}$$

$$V_L = \omega_5 \cdot LK_5 = \frac{V_{C_5}}{r_5} \cdot 2r_5 = 2V_{C_5} = 2V_1 \frac{r_3}{R_3}$$

Подставим массово-инерционные характеристики и соотношения между скоростями. Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2 + \frac{1}{2} m_5 V_{C5}^2 = \\
&= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_4 R_4^2 \left(V_1 \frac{r_3}{R_4 R_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_5 r_5^2 \left(V_1 \frac{r_3}{r_5 R_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_5 \left(V_1 \frac{r_3}{R_3} \right)^2 = \\
&= \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{8} m_4 + \frac{3}{16} m_5 \right) \cdot V_1^2
\end{aligned}$$

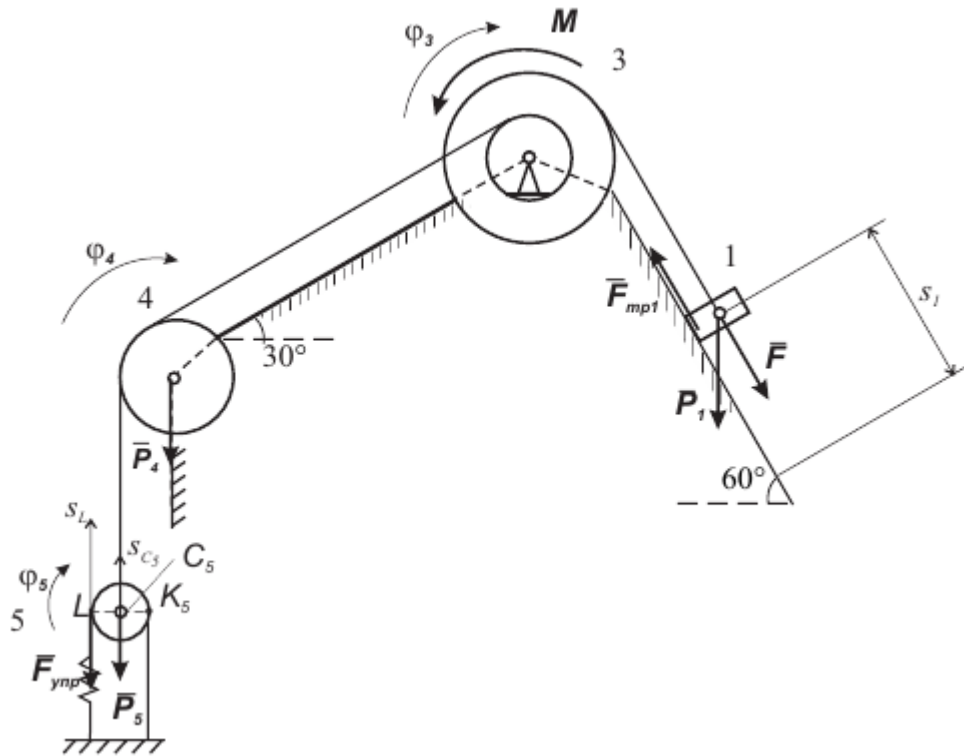


Рисунок 3. Определение работ активных сил на перемещении системы

Сумма работ внешних сил на перемещении системы, соответствующем перемещению s_1 :

$$\sum A_k^e = A_F + A_M + A_{P_1} + A_{F_{mp1}} + A_{F_{ynp}} + A_{P_5}$$

$$A_F = \int_0^{s_1} F(s) ds = \int_0^{s_1} 60(5 + 4s) ds = 60(5s_1 + 2s_1^2)$$

$$A_M = -M \cdot \varphi_3$$

$$A_{P_1} = P_1 \cdot s_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g \cdot s_1$$

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} \cdot s_1 = -f \cdot N_1 \cdot s_1 = -f \cdot P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot s_1 = -\frac{1}{2} f m_1 g \cdot s_1$$

$$A_{F_{ynp}} = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = \frac{c}{2} (0 - \lambda_1^2) = -\frac{c}{2} s_L^2$$

$$A_{P_5} = -P_5 \cdot s_{C5} = -m_5 g \cdot s_{C5}$$

Примечание: сила упругости пружины и сила трения груза 1 о плоскость рассматриваются как активные внешние силы. λ_0 и λ_1 — начальное и конечное удлинения пружины.

Работа остальных сил равна нулю.

Соотношения между перемещениями аналогичны соотношениям между скоростями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \frac{V_1}{R_3} \\ V_{C_5} &= V_1 \frac{r_3}{R_3} \\ \omega_5 &= \frac{V_{C_5}}{C_5 K_5} = V_1 \frac{r_3}{r_5 R_3} \\ V_L &= 2V_{C_5} = 2V_1 \frac{r_3}{R_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{s_1}{R_3} \\ s_{C_5} &= s_1 \frac{r_3}{R_3} \\ \varphi_5 &= \frac{s_{C_5}}{C_5 K_5} = s_1 \frac{r_3}{R_3 r_5} \\ s_L &= 2s_{C_5} = 2s_1 \frac{r_3}{R_3} \end{aligned} \right.$$

Тогда сумма работ внешних сил с учетом соотношений между перемещениями равна:

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= 60(5s_1 + 2s_1^2) - M \cdot \varphi_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g \cdot s_1 - \frac{1}{2} f m_1 g \cdot s_1 - \frac{c}{2} s_L^2 - m_5 g \cdot s_{C_5} = \\ &= 60(5s_1 + 2s_1^2) - M \cdot \frac{s_1}{R_3} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g \cdot s_1 - \frac{1}{2} f m_1 g \cdot s_1 - \frac{c}{2} \left(2s_1 \frac{r_3}{R_3} \right)^2 - m_5 g \cdot s_1 \frac{r_3}{R_3} = \\ &= \left(60(5 + 2s_1) - \frac{M}{R_3} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g - \frac{1}{2} f m_1 g - \frac{c}{2} s_1 - \frac{1}{2} m_5 g \right) \cdot s_1 \end{aligned}$$

(учтено, что $R_3 = 2r_3$).

Приравниваем кинетическую энергию сумме работ:

$$\left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{8} m_4 + \frac{3}{16} m_5 \right) \cdot V_1^2 = \left(60(5 + 2s_1) - \frac{M}{R_3} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g - \frac{1}{2} f m_1 g - \frac{c}{2} s_1 - \frac{1}{2} m_5 g \right) \cdot s_1$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{\left(60(5 + 2s_1) - \frac{M}{R_3} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g - \frac{1}{2} f m_1 g - \frac{c}{2} s_1 - \frac{1}{2} m_5 g \right) \cdot s_1}{\left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{8} m_4 + \frac{3}{16} m_5 \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{58,6358}{8,1875}} = \sqrt{7,1616} = 2,676 \text{ м/с} \end{aligned}$$

Ответ: $V_1 = 2,676 \text{ м/с}$